ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Е.А.Хляпова

КОНГРУЭНЦИИ ОСНАЩЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В П-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В п-мерном аффинном пространстве рассматриваются невырожденные (п-I)-мерные многообразия (конгруэнции) φ_{n-1} пар фигур $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\}$, где $\mathcal{F}_1$ –центральный квадратичный элемент, а $\mathcal{F}_2$ –точка, не инцидентная его гиперплоскости. Пара $\mathcal{F}$ названа оснащенным квадратичным элементом. Для оснащенного квадратичного элемента введено понятие псевдофокальных точек, найдена их геометрическая характеристика в трехмерном аффинном пространстве. Получен характеристический признак совпадения фокальных точек коники $\mathcal{F}_1$ конгруэнции φ_2 с псевдофокальными точками оснащенной коники $\mathcal{F}$ этой же конгруэнции.

§I. Псевдофокальные точки оснащенного квадратичного элемента конгруэнции

Отнесем конгруэнцию φ_{n-1} к частично канонизированному реперу $R_1=\{A,\bar{e}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta=1,2,\dots,n)$, начало A которого совмещено с центром квадратичного элемента $\mathcal{F}_1$, векторы $\bar{e}_i$ $(i,j,k=1,2,\dots,n-1)$ расположены параллельно его гиперплоскости, а вектор $\bar{e}_n$ коллинеарен прямой AF_2.

Уравнения квадратичного элемента $\mathcal{F}_1$, формула, задающая точку $\mathcal{F}_2$, и система дифференциальных уравнений конгруэнции φ_{n-1} записываются соответственно в виде:

$$a_{ij}x^i x^j-1=0,\quad x^n=0\ ; \tag{1}$$

$$\bar{\mathcal{F}}_2=\bar{A}+c^n\bar{e}_n, \tag{2}$$

$$\omega^n=\Lambda^n_i\omega^i,\quad \omega^n_i=\Lambda^n_{ij}\omega^j,\quad \omega^i_n=\Lambda^i_{nj}\omega^j, \tag{3}$$

$$\Theta_{ij}=\Lambda_{ijk}\omega^k,\quad \Delta c^n=\Lambda_i\omega^i,$$

где

$$\Theta_{ij}\equiv da_{ij}-a_{kj}\omega^k_i-a_{ik}\omega^k_j,\quad \Delta c^n\equiv dc^n+\omega^n_n c^n,$$

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\dots\wedge\omega^{n-1}\neq 0,$$

$\omega^\alpha,\omega^\alpha_\beta$ –компоненты инфинитезимальных перемещений репера.

Последовательные продолжения уравнений

$$\Theta_{ij}=\Lambda_{ijk}\omega^k \tag{4}$$

приводят к бесконечной последовательности функций:

$$\Lambda_{iji_1},\Lambda_{iji_1i_2},\dots,\Lambda_{iji_1\dots i_p},\dots,\quad (i_1,\dots,i_p=1,\dots,n-1), \tag{5}$$

удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla\Lambda_{iji_1}=\Lambda_{iji_1k}\omega^k,$$

$$\nabla\Lambda_{iji_1i_2}=\Lambda_{iji_1i_2k}\omega^k,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\nabla\Lambda_{iji_1\dots i_p}=\Lambda_{iji_1\dots i_pk}\omega^k,$$

где

$$\nabla\Lambda_{iji_1\dots i_p}\equiv d\Lambda_{iji_1\dots i_p}-\Lambda_{kji_1\dots i_p}\omega^k_i-\dots-\Lambda_{iji_1\dots k}\omega^k_{i_p}.$$

С помощью функций (5) строим систему алгебраических уравнений

$$\mathcal{F}_3 \equiv \Lambda_{(i_1 i_2 i_3)} x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} - 2! = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{7}$$
$$\mathcal{F}_n \equiv \Lambda_{(i_1 \ldots i_n)} x^{i_1} \cdot \ldots \cdot x^{i_n} - (n-1)! = 0,$$

каждое из которых определяет инвариантное алгебраическое многообразие-цилиндрическую алгебраическую гиперповерхность с образующими, параллельными вектору $\bar{e}_n$. Таким образом, в пространстве A_n возникает семейство инвариантных цилиндрических алгебраических гиперповерхностей порядков 3,...,п, которое пересекает квадратичный элемент $\mathcal{F}_1$ в п! точках, определяемых системой уравнений:

$$a_{ij} x^i x^j - 1 = 0, \quad x^n = 0, \quad \mathcal{F}_3 = 0, \ldots, \mathcal{F}_n = 0. \tag{8}$$

Эти точки назовем псевдофокальными точками оснащенного квадратичного элемента $\mathcal{F}$.

Введем следующие обозначения: пусть M -некоторая фиксированная точка квадратичного элемента $\mathcal{F}_1$, ℓ_M-линия пересечения касательной гиперплоскости гиперповерхности (A) с 2-плоскостью $(A, \overline{AM}, \bar{e}_n)$, τ_M -линия на гиперповерхности (M), соответствующая линии с касательной ℓ_M на гиперповерхности (A).

Т е о р е м а I. На гиперповерхности, описанной псевдофокальной точкой M оснащенного квадратичного элемента $\mathcal{F}$, касательная вдоль линии τ_M инцидентна гиперплоскости, образованной вектором $\bar{e}_n$ и касательной (п-2)-плоскостью к квадратичному элементу $\mathcal{F}_1$ в этой же точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем конгруэнцию φ_{n-1} к реперу $R_{2,M} = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, конец E_1 вектора $\bar{e}_1$ которого совмещен с исследуемой точкой M, векторы $\bar{e}_a$ $(a=2,\ldots,n-1)$ коллинеарны касательной (п-2)-плоскости квадратичного элемента в точке M. В репере $R_{2,M}$ линия τ_M поверхности $(M) \equiv E_1$ определяется уравнениями

$$\omega^a = 0 \tag{9}$$

и имеют место соотношения

$$a_{11} = 1, \quad a_{1a} = 0, \quad \omega_1^i = \Lambda_{1j}^i \omega^j, \quad \omega_a^1 = \Lambda_{ai}^1 \omega^i, \tag{10}$$

$$2\omega_1^1 + \Lambda_{111} \omega^1 = -\Lambda_{11a} \omega^a. \tag{11}$$

Так как точка $M \equiv E_1$ -одна из псевдофокальных точек оснащенного квадратичного элемента $\mathcal{F}$, то из третьего уравнения системы (8) следует, что

$$\Lambda_{111} = 2. \tag{12}$$

Учитывая соотношение (I2) в выражении (II), получаем

$$\omega^1 + \omega_1^1 = 0 \qquad (mod\ \omega^a). \tag{13}$$

Имеем

$$d\bar{E}_1 = (\omega^1 + \omega_1^1)\bar{e}_1 + (\omega^a + \omega_1^a)\bar{e}_a + (\omega^n + \omega_1^n)\bar{e}_n.$$

Следовательно,

$$(d\bar{E}_1)_{\omega^a=0} = \omega_1^a \bar{e}_a + (\omega^n + \omega_1^n)\bar{e}_n.$$

Таким образом, теорема доказана.

§ 2. Геометрическая характеристика псевдофокальных точек оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2

Рассмотрим конгруэнцию φ_2 оснащенных коник $\mathcal{F}$ в трехмерном аффинном пространстве.

Сохраняем обозначения предыдущего параграфа. Как следует из (8), в трехмерном аффинном пространстве координаты шести псевдофокальных точек оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2 определяются из системы уравнений:

$$a_{ij}\,x^i x^j - 1 = 0\,, \quad x^3 = 0\,,$$
$$\Lambda_{(ijk)}\,x^i x^j x^k - 2 = 0\,, \qquad (14)$$

где

$$i, j, k = 1,2.$$

Т е о р е м а 2. Фиксированная точка M коники $\mathcal{F}_1$ конгруэнции φ_2 тогда и только тогда является псевдофокальной точкой оснащенной коники $\mathcal{F}$, когда касательная к линии τ_M в точке M инцидентна плоскости, образованной вектором $\bar{e}_3$ и касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в этой же точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия, приведенного в теореме, была установлена в теореме I. Для доказательства достаточности отнесем конгруэнцию φ_2 к реперу $R_{2,M}$, построенному в предыдущем параграфе. Соотношения (I0) и (II) имеют соответственно вид:

$$a_{11} = 1\,, \quad a_{12} = 0\,, \quad \omega_1^i = \Lambda_{1j}^i\,\omega^j, \; \omega_2^1 = \Lambda_{2i}^1\,\omega^i, \qquad (15)$$

$$2\,\omega_1^1 + \Lambda_{111}\,\omega^1 = -\,\Lambda_{112}\,\omega^2. \qquad (16)$$

Линия τ_M поверхности $(M) \equiv (E_1)$ определяется уравнением

$$\omega^2 = 0. \qquad (17)$$

Имеем

$$d\bar{E}_1 = (\omega^1 + \omega_1^1)\bar{e}_1 + (\omega^2 + \omega_1^2)\bar{e}_2 + (\omega^3 + \omega_1^3)\bar{e}_3. \qquad (18)$$

Пусть на поверхности (E_1), описанной фиксированной точкой E_1 коники $\mathcal{F}_1$, касательная к линии τ_M инцидентна плоскости $(E_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Тогда

$$\omega^1 + \omega_1^1 = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega^2). \qquad (19)$$

Сравнивая (I6) и (I9), получаем условие

$$\Lambda_{111} = 2$$

того, что E – псевдофокальная точка оснащенной коники $\mathcal{F}$.

Установим связь между фокальными точками коники $\mathcal{F}_1$ и псевдофокальными точками оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2, предварительно приведя некоторые формулы.

Уравнения коники $\mathcal{F}_1$ в репере $R_{2,M}$ записываются в виде:

$$(x^1)^2 + a\,(x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0, \qquad (20)$$

где

$$a = a_{22}\,,$$

и имеют место соотношения

$$\Lambda_{111} = -2\Lambda_{11}^1\,, \quad \Lambda_{112} = -2\Lambda_{12}^1\,, \quad \Lambda_{121} = -(\Lambda_{21}^1 + a\Lambda_{11}^2), \qquad (21)$$
$$\Lambda_{122} = -(\Lambda_{22}^1 + a\Lambda_{12}^2), \; da = \omega^1(2a\Lambda_{21}^2 + \Lambda_{221}) + \omega^2(2a\Lambda_{22}^2 + \Lambda_{222}).$$

Следовательно, система уравнений (I4) для нахождения координат псевдофокальных точек оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2, принимает вид:

$$(x^1)^2 + a\,(x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0,$$
$$(2\Lambda_{11}^1 (x^1)^2 + 2\,(\Lambda_{21}^1 + a\Lambda_{11}^2)x^1 x^2 - \Lambda_{221}\,(x^2)^2 + 2x^1)x^1 + \qquad (22)$$
$$+(2\Lambda_{12}^1 (x^1)^2 + 2\,(\Lambda_{22}^1 + a\,\Lambda_{12}^2)x^1 x^2 - \Lambda_{222}\,(x^2)^2 + 2x^2)x^2 = 0.$$

Координаты фокальных точек коники $\mathcal{F}_1$ определяются из уравнений

$$(x^1)^2 + a(x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0,$$

$$(2\Lambda^1_{11}(x^1)^2 + 2(\Lambda^1_{21} + a\Lambda^2_{11})x^1x^2 - \Lambda_{221}(x^2)^2 + 2x^1)(\Lambda^3_{12}x^1 + \Lambda^3_{22}x^2 + \Lambda^3_2) -$$
$$-(2\Lambda^1_{12}(x^1)^2 + 2(\Lambda^1_{22} + a\Lambda^2_{12})x^1x^2 - \Lambda_{222}(x^2)^2 + 2x^2)(\Lambda^3_{11}x^1 + \Lambda^3_{21}x^2 + \Lambda^3_1) = 0. \quad (23)$$

Исключим из рассмотрения случай, когда касательная плоскость поверхности, описанной исследуемой фиксированной точкой M, коллинеарна плоскости, образованной вектором $\bar{e}_3$ и касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в точке M, т.е. считаем, что

$$|\Lambda^1_{11} + 1| + |\Lambda^1_{12}| \neq 0. \quad (24)$$

Т е о р е м а 3. Фокальная точка M коники $\mathcal{F}_1$ тогда и только тогда является псевдофокальной точкой оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2, когда касательная к линии τ_M в точке M совпадает с касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в этой же точке.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть фокальная точка $M \equiv E_1$ коники $\mathcal{F}_1$ в то же время является псевдофокальной точкой оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2, тогда из систем уравнений (22) и (23) получаем:

$$\Lambda^1_{11} = -1, \quad \Lambda^1_{12}(\Lambda^3_{11} + \Lambda^3_1). \quad (25)$$

Из неравенства (24) и первого уравнения системы (25) следует, что

$$\Lambda^1_{12} \neq 0.$$

Уравнения (25) приводятся к виду:

$$\Lambda^1_{11} = -1, \quad \Lambda^3_{11} + \Lambda^3_1 = 0. \quad (26)$$

Вдоль линии τ_M имеем:

$$(d\bar{E}_1)_{\omega^2=0} = \omega^1\left((1+\Lambda^1_{11})\bar{e}_1 + (1+\Lambda^2_{11})\bar{e}_2 + (\Lambda^3_1 + \Lambda^3_{11})\bar{e}_3\right). \quad (27)$$

Из (27) непосредственно следует, что при условиях (26) касательная к линии τ_M поверхности $(M) \equiv (E_1)$ совпадает с касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в этой же точке.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть на поверхности, описанной фокальной точкой $M \equiv E_1$, касательная к линии τ_M совпадает с касательной к конике $\mathcal{F}_1$ в этой же точке. Тогда:

$$\Lambda^1_{11} = -1, \quad \Lambda^3_1 + \Lambda^3_{11} = 0. \quad (28)$$

Подставляя соотношения (28) в систему уравнений (22), убеждаемся, что точка $M \equiv E_1$ является псевдофокальной точкой оснащенной коники $\mathcal{F}$ конгруэнции φ_2.

Список литературы

I. Малаховский В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.- "Труды Томского ун-та", I963, вып.3, с. 45-53.